同変写像の特異点 (局所的及び大域的特異点論の研究)

AUTHOR(S):

原, 靖浩

CITATION:

原, 靖浩. 同変写像の特異点 (局所的及び大域的特異点論の研究). 数理解析研究所講究録 1998, 1050: 93-99

ISSUE DATE:

1998-06

URL:

http://hdl.handle.net/2433/62216

数理解析研究所講究録
1050 巻 1998 年 93-99

同変写像の特異点

大阪大学理学研究科　　原　靖浩 (Yasuhiro HARA)

群が作用する多様体上の同変モース関数については [8]等において研究されている．本稿では有限群の作用する多様体からユークリッド空間への滑らかな同変写像でその特異点がフォールド型のみからなるものについて不動点集合と写像の特異点の関係を考察する．

1. フォールド写像

M を n 次元可微分連結閉多様体とし, $f: M \to \mathbf{R}^p$ $(p \leq n)$ を滑らかな写像とする．以下ではとくにことわらない限り多様体, 写像は C^∞級とする．

$S(f) = \{q \in M \mid \mathrm{rank} df_q < p\}$ とおき, これを f の特異点集合と呼ぶ. $q \in S(f)$ がフォールド型とは q を中心とする局所座標 $(x_1, \ldots, x_n)$ と $f(q)$ を中心とする局所座標 $(y_1, \ldots, y_p)$ および整数 $\lambda\,(0 \leq \lambda \leq n-p+1)$で

$$y_i \circ f = x_i \ (i \leq p-1)\ ,$$
$$y_p \circ f = -x_p^2 - \cdots - x_{p+\lambda-1}^2 + x_{p+\lambda}^2 + \cdots + x_n^2$$

と書けるものが存在するときに言う．

さらに $\lambda = 0$ または $\lambda = n-p+1$ のとき q を定値フォールド型特異点と呼ぶ．

$S(f)$ がフォールド型特異点のみからなるとき, f をフォールド写像, $S(f)$ が定値フォールド型特異点のみからなるとき, f を special generic map とよぶ. また, $n-p+1$ が偶数のときにはフォールド型特異点の定義にでてくる λ について $\lambda \equiv n-p+1-\lambda($ mod 2) であり, 局所座標の取り方によらずに λ が偶数か奇数かが定まり, f がフォールド写像のとき, $S^+(f) = \{q \in S(f) \mid \lambda\text{は偶数}\}$, $S^-(f) = \{q \in S(f) \mid \lambda\text{は奇数}\}$ と定義する．

f がフォールド写像のとき, $S(f)$ は多様体になり, $f|_{S(f)} : S(f) \to \mathbf{R}^p$ は immersion になることに注意しておく．

次に写像 $f: M \to \mathbf{R}^p$ $(p < n)$ のStein 分解について述べる．

$q, q' \in M$, に対して同値関係 $q \sim q'$ を $f(q) = f(q')$ かつ q と q' が $f^{-1}(f(q))$ の同じ連結成分に属するということで定義する. W_f をこの同値関係による M の商空間とし, $q_f : M \to W_f$ を商写像とする. また, $f' \circ q_f = f$ を満たす写像 $f' : W_f \to \mathbf{R}^p$ がただひとつ存在する. 空間 W_f または次の可換図式

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q_f"'] & & \mathbf{R}^p \\ & W_f \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

を f の Stein 分解と呼ぶ.

$f : M \to \mathbf{R}^p$ $(p < n)$ が special generic map のとき, 次のことが成り立つ.

命題 1.1. (i) W_f はコンパクト p次元多様体で境界をもつ.

(ii) $q_f|S(f) : S(f) \to \partial W_f$ は微分同相写像である.

(iii) $f' : W_f \to \mathbf{R}^p$ は *immersion* である.

フォールド写像, special generic map については [1, 4, 5, 6, 7]等で詳しく研究されている.

2. 同変フォールド写像

以下, G を有限群とし, M を n次元連結閉多様体で G が滑らかに作用しているものとする. また, $M^G = \{x \in M \mid gx = x \text{ for } \forall g \in G\}$ とおき, これを不動点集合と呼ぶ. また, 以下では接バンドル $T(M)$ 上には G不変Riemann計量を一つとり固定して考えることにする. (変換群についての詳しいことは [3]を参照されたい.)

$\mathbf{R}^p$ 上の G 作用は trivial なものを考え, G フォールド写像 $f : M \to \mathbf{R}^p$ とは G 写像でありかつフォールド写像であるものをいう.

まず, 次の補題を証明する.

補題 2.1. $f : M \to \mathbf{R}^p$ を G 写像とする. $q \in M^G$ とするとき, $df|_{T_q(M^G)^\perp} = 0$.

ここで, $T_q(M^G)^\perp$ は $T_q(M^G)$ の $T_q(M)$ の中での直交補Gベクトル空間とする.

証明. $q \in M^G$ とする.

$v \in T_q(M^G)^\perp$ に対して, $\sum_{g\in G} gv$ は $T_q(M^G)^\perp$ の元であり, 任意の $h \in G$ に対して,

$$h\sum_{g\in G} gv = \sum_{g\in G} hgv = \sum_{g\in h^{-1}G} gv = \sum_{g\in G} gv.$$

$T_q(M^G)^\perp$ における不動点は原点 0 のみなので $\sum_{g\in G} gv = 0$

一方, $\mathbf{R}^p$ 上には G が自明に作用していることを考えると,

$$df|_{T_q(M^G)^\perp}(\sum_{g\in G} gv) = \sum_{g\in G} gdf|_{T_q(M^G)^\perp}(v) = |G|df|_{T_q(M^G)^\perp}(v).$$

従って,

$$|G|df|_{T_q(M^G)^\perp}(v) = df|_{T_q(M^G)^\perp}(\sum_{g\in G} gv) = df|_{T_q(M^G)^\perp}(0) = 0.$$

よって, $df|_{T_q(M^G)^\perp}(v) = 0$ となる. □

命題 2.2. 不動点集合 M^G のある連結成分の次元が $p-1$ より小さいとき, G 写像 $f : M \to \mathbf{R}^p$ はフォールド型でない特異点をもつ.

証明. $q \in M$ が正則点のときは $\mathrm{rank} df_q = p$, フォールド型特異点のときは $\mathrm{rank} df_q = p-1$ となる.

不動点集合 M^G のある連結成分 N の次元が $p-1$ より小さいとき, $q \in N$ に対して, 上の補題より $df|_{T_qN^\perp} = 0$ が成り立つので $\mathrm{rank} df_q < p-1$ となる. よって, N 上の点はフォールド型でない特異点になる. □

Gフォールド写像の特異点集合ともとの多様体の不動点集合について次の関係がある.

命題 2.3. $f : M \to \mathbf{R}^p$ $(p \leq n)$ を G フォールド写像とし, $S(f) = S_1 \cup \cdots \cup S_k$ を f の特異点集合の連結成分への分解とする. このとき, 各i に対して, $S_i \subset M^G$ または $S_i \cap M^G = \emptyset$.

証明. $S_i \cap M^G (= S_i \cap S(f)^G)$ は S_i の中で閉集合である. $S_i \cap M^G \neq \emptyset$ のとき, $x \in S_i \cap M^G$ と仮定すると, $f|_{S_i} : S_i \to \mathbf{R}^p$ はimmersion だから x の S_i の中のある連結な近傍 U 上で f は単射となる. f が G 写像で $\mathbf{R}^p$ 上の作用が自明であることを考えると U は M^G に含まれることがわかる.

よって, $S_i \cap M^G$ は S_i のなかで開集合となり, S_i は連結だから$S_i \cap M^G = S_i$. したがって $S_i \subset M^G$ となる.

以上から, $S_i \subset M^G$ または $S_i \cap M^G = \emptyset$ がわかる. □

定理 2.4. $f : M \to \mathbf{R}^p$ $(p \leq n)$ を G フォールド写像とし, N を M^G の連結成分の一つで $\dim N \geq p$ を満たすものとする. このとき, $f|_N : N \to \mathbf{R}^p$ もフォールド写像になる.

証明. $S(f) = S_1 \cup \cdots \cup S_k$ を f の特異点集合の連結成分への分解とするとき, $S_i \cap M^G \neq \emptyset$ ならば命題 2.3 より $S_i \subset M^G$ となる. また, $df_q|_{TN_q^\perp} = 0$ なので $\mathrm{rank}(d(f|_N)_q) = \mathrm{rank} df_q$ がなりたち, $S(f|_N) = S(f) \cap N$ がわかる.

N は M^G の連結成分の一つなので M の部分多様体であり, 上の考察より, $S(f|_N)$ は N の$p-1$次元の部分多様体であることがわかる.

よって, $q \in S(f|_N)$ とすると M の中の q を中心とする局所座標 $(U; x_1, \cdots, x_n)$ で

$$x_p(a) = x_{p+1}(a) = \cdots = x_n(a) = 0 \quad for\ \forall a \in S(f|_N)\ ,$$

$$x_{k+1}(b) = \cdots = x_n(b) = 0 \quad for\ \forall b \in N$$

となるものがとれる.(ここで, $k = \dim N$)

$f|_{S(f)}$ が immersion であることから M の中の局所座標を十分小さくとっておくと, $\mathbf{R}^p$ の $f(q)$ を中心とする局所座標 $(y_1, \cdots, y_p)$ を

$$y_i \circ f = x_i \quad (1 \leq i \leq p-1)$$

となるようにとれる.

f はフォールド写像だから, $x_1, \cdots, x_{p-1}$ を固定すると $y_p \circ f$ はモース関数になる. Hessian $(\frac{\partial^2 (y_p \circ f)}{\partial x_i \partial x_j}(q))_{p \leq i,j \leq n}$ を考えると,

$df_q|_{TN_q^{\perp}} = 0$ だから, 任意の $j \geq k+1$ に対して N 上で $\frac{\partial (y_p \circ f)}{\partial x_j} = 0$.

よって, $p \leq i \leq k$, $j \geq k+1$ のとき $\frac{\partial^2 (y_p \circ f)}{\partial x_i \partial x_j}(q) = 0$. 従って, Hessian は次のような形になる.

$$\begin{pmatrix} (\frac{\partial^2 (y_p \circ f)}{\partial x_i \partial x_j}(q))_{p \leq i,j \leq k} & 0 \\ 0 & (\frac{\partial^2 (y_p \circ f)}{\partial x_i \partial x_j}(q))_{k+1 \leq i,j \leq n} \end{pmatrix}.$$

これが非退化だから $(\frac{\partial^2 (y_p \circ f)}{\partial x_i \partial x_j}(q))_{p \leq i,j \leq k}$ も非退化. 従って, $f|_N$ はフォールド写像になることがわかる. □

M 上の G 作用が半自由(semi-free)とは M の任意の元 x で, $G_x = G$ または $\{e\}$ が成り立つときをいう. ここで, $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$(アイソトロピー群) で e は G の単位元を表す. また, M の任意の元 x で, $G_x = \{e\}$ が成り立つときこの作用を自由という.

命題 2.5. G を $\mathbf{Z}_2$ と同型でなく自明でない有限群とし, M 上の G 作用を半自由であり自明でないものとする. このとき, 不動点集合 M^G の各連結成分の余次元は偶数である.

証明. N を M^G の連結成分の一つとし, N の M の中における余次元を l とする.

ν を N の M における法Gベクトル・バンドルとする. ν 上に G不変Riemann計量を考えその単位球面バンドルを $S(\nu)$ と書くことにする. ν は不動点集合の連結成分の法Gベクトル・バンドルであり $S(\nu)$ の各ファイバーに G が不動点なしに作用することがわかる. また, M 上の G 作用は半自由なので $S(\nu)$ 上の G 作用は自由になることもわかる.

$S(\nu)$ のファイバーは $l-1$ 次元の球面であり, これに $\mathbf{Z}_2$ と同型でなく自明でない群 G が自由に作用することになるが, このとき, $l-1$ は奇数になることが知られている([3, Chapter 5] を見よ). よって, l は偶数になる. □

この命題から G 作用が命題中の条件をみたし, $f: M \to \mathbf{R}$ が Gフォールド写像で $n-p+1$ が偶数のとき, N を M^G の連結成分の一つで $\dim N \geq p$ を満たすものとすると $S^+(f|_N), S^-(f|_N)$ が考えられることがわかる. $S^+(f), S^-(f)$ と $S^+(f|_N), S^-(f|_N)$ の関係について次のことがわかる.

定理 2.6. G を $\mathbf{Z}_2$ と同型でない有限群とし, M 上の G 作用を半自由とする. $f: M \to \mathbf{R}^p$ $(p < n)$ を G フォールド写像とする. $n-p+1$ が偶数であるとき, N を $\dim N \geq p$ となる M^G の連結成分とすると, $q \in S^+(f) \cap N$ ならば $q \in S^+(f|_N)$, $q \in S^-(f) \cap N$ ならば $q \in S^-(f|_N)$ が成り立つ.

証明. N を $\dim N \geq p$ となる M^G の連結成分とする. $q \in S(f)$ に対して, 定理 2.4 の証明中のように M の中のq を中心とする局所座標 $(x_1, \ldots, x_n)$ と $f(q)$ を中心とする局所座標 $(y_1, \ldots, y_p)$ で

$$x_p(a) = x_{p+1}(a) = \cdots = x_n(a) = 0 \quad for\ \forall a \in S(f|_N)\ ,$$

$$x_{k+1}(b) = \cdots = x_n(b) = 0 \quad for\ \forall b \in N$$

であり(ここで, $k = \dim N$), $y_i \circ f = x_i$ $(i \leq p-1)$ をみたし,
$(x_1 \cdots, x_{p-1})$ を $x_1 = \cdots = x_{p-1} = 0$ と固定すると $y_p \circ f$ はモース関数となるものがある.

$(x_1, \cdots, x_k)$ は N の局所座標になっていることおよび q における $y_p \circ f$ のHessianが定理 2.4 の証明中のようになることに注意し [8, Lemma 4.1]を用いると, q を中心とする局所座標 $(x_1, \ldots, x_{p-1}, z_p, \cdots, z_n)$ で

$$\begin{aligned} y_p \circ f|_{\{x_1 = \cdots = x_{p-1} = 0\}} = & - z_p^2 - \cdots - z_{p+\lambda-1}^2 + z_{p+\lambda}^2 + \cdots + z_k^2 \\ & - z_{k+1}^2 - \cdots - z_{k+\mu}^2 + z_{k+\mu+1}^2 + \cdots + z_n^2 \end{aligned}$$

を満たし, かつ, $(z_p, \cdots, z_k)$ および $z_{k+1}^2 + \cdots + z_n^2$ が G-不変なものをとることができる.

$-z_{k+1}^2 - \cdots - z_{k+\mu}^2 + z_{k+\mu+1}^2 + \cdots + z_n^2$ および $z_{k+1}^2 + \cdots + z_n^2$ が G-不変なので, $z_{k+1}^2 + \cdots + z_{k+\mu}^2$ および $z_{k+\mu+1}^2 + \cdots + z_n^2$ はG-不変. GはM 上に半自由に作用しているので$\mu - 1$ 次元球面 $\{(z_{k+1}, \cdots, z_{k+\mu}) \mid z_{k+1}^2 + \cdots + z_{k+\mu}^2 = r(r$ は十分小さい正の実数$)\}$ 上に自由に作用する.

G は $\mathbf{Z}_2$ と同型でない有限群であり, この条件を満たすには μ は偶数にならなければならない. 同様にして, $n-k-\mu$ も偶数.

$(x_1, \ldots, x_{p-1}, z_p, \cdots, z_k)$ は N の q を中心とする局所座標で λ が偶数か奇数かで $q \in S^+(f|_N)$ か $q \in S^-(f|_N)$ かが決まる. $q \in S^+(f) \cap N$ のとき, $\lambda + \mu$ が偶数なので λ も偶数. よって, $q \in S^+(f|_N)$.

同様にして, $q \in S^-(f) \cap N$ のとき, $q \in S^-(f|_N)$. □

補題 2.7. *$f : M \to \mathbf{R}^p$ を G写像とする. Stein 分解*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q_f"'] & & \mathbf{R}^p \\ & W_f \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

において, W_f は自然に G空間となり, q_f, f' は G写像になる.

証明. W_f 上の G 作用を $g \cdot q_f(x) = q_f(g \cdot x)$ と定義すればよい. q_f, f' が G写像になることは容易にわかる. □

$f : M^n \to \mathbf{R}^p$ $(p < n)$ が special generic map であり, かつ G 写像であるとき, f を G-special generic map とよぶことにする. G-special generic map の Stein分解について次のことが成り立つ.

命題 2.8. *$f : M \to \mathbf{R}^p$ $(p < n)$ を G-special generic map とする. 任意の $g \in G$ に対して, $W_f^g = W_f$または$\emptyset$. ここで, $W_f^g = \{x \in W_f \mid gx = x\}$.*

証明. $g \in G$ とする. $W_f^g \neq \emptyset$ のとき, $x \in W_f^g$ とすると $f' : W_f \to \mathbf{R}^p$ が immersion だから x の W_f の中のある近傍 U においては f' は単射. また, m を g の位数とし $V = U \cap gU \cap \cdots \cap g^{m-1}U$ とおくと, V 上で f' は単射であり, 任意の $y \in V$ に対して $f'(gy) = g\,f'(y) = f'(y)$ かつ $gy \in V$ なので, V 上で $gy = y$. 従って $V \subset W_f^g$ となり, W_f^g は W_f の開集合である. W_f^g が W_f の閉集合であることは容易にわかる. M は連結だから W_f も連結であり, $W_f^g = W_f$ がわかる. □

G-special generic map の特異点集合ともとの多様体における不動点集合には次のような関係がある.

系 2.9. *$f : M \to \mathbf{R}^p$ $(p < n)$ が G-special generic map であるとき, $S(f) \subset M^G$ または $M^G = \emptyset$.*

証明. $M^G \neq \emptyset$ のとき, $x \in M^G$ とし, $y = q_f(x)$ とする. 任意の $g \in G$ に対して $gy = gq_f(x) = q_f(gx) = q_f(x) = y$ なので, 命題 2.8より任意の $g \in G$ に対して $W_f^g = W_f$ となる. よって, $W_f^G = W_f$. 命題 1.1より, $q_f|S(f) : S(f) \to \partial W_f$ は微分同相写像であり, しかも同変写像なので $S(f)^G = S(f)$, 従って $S(f) \subset M^G$ となる. 以上から, $S(f) \subset M^G$ または $M^G = \emptyset$ が示された. □

命題 2.10. *$f : M \to \mathbf{R}^p$ $(p < n)$ が G-special generic map であるとき, M^G のある連結成分の次元が p 以上ならば M^G は連結.*

証明. N を M^G の連結成分で $\dim N \geq p$ を満たすものとする. M がコンパクトで W_f が Hausdorff なので $q_f(N)$ はW_f のなかで閉集合である. 一方, $q \in N$ とすると補題2.1より $\mathrm{rank}d(f|_N)_q = \mathrm{rank}df_q$ が成り立ち, したがって, 局所的な状況をみると $q_f(N)$ が W_f の中で開集合になることがわかる. W_f は連結だから $q_f(N) = W_f$.
他の M^G の連結成分が存在するとすると, それは $S(f)$ と交点をもち, $q_f(N) = W_f$ より $S(f) \subset N$ なのでその $S(f)$ との交点で N とも交わる. 二つの連結成分が共通部分をもつのでこれは矛盾. よって, M^G は連結. □

本稿では写像の行き先がユークリッド空間で群が自明に作用すの場合について考えたが, 行き先を多様体にし, 群が自明でなく作用する場合について考えることが最終的な目標になる. 同変写像については様々な研究があるが, その特異点をフォールド型等に制限したときにどのような状況がおこるかというようなことはまだあまり研究されておらず, 今後の課題の一つになると思われる.

最後に 講演の後に過去に安定同変写像についての研究があることを教えていただき, 論文([2]等)を紹介していただいた泉屋周一氏に感謝致します.

References

[1] T. Fukuda: *Topology of folds, cusps and Morin singularities*, in: Y. Matsumoto, T. Mizutani and S. Morita, eds., A Fete of Topology, Academic Press, 1987, 331–353.
[2] S. Izumiya: Note on stable equivariant maps, Math. J. of Okayama Univ. **24**(1982), 167–178.
[3] K. Kawakubo: The Theory of Transformation Groups, Oxford Univ. Press, 1991
[4] O. Saeki: Topology of special generic maps of manifolds into Euclidean spaces, Topology Appl. **49**(1993), 265–293.
[5] O. Saeki: Note on the topology of folds, J. Math. Soc. Japan **44**(1992), 551–566.
[6] K. Sakuma: On special generic maps of simply connected $2n$-manifolds into $\mathbf{R}^3$, Topology Appl. **50**(1993), 249–261.
[7] K. Sakuma: On the topology of simple fold maps, Tokyo J. Math.**17**(1994), 21–31.
[8] A.G. Wasserman: Equivariant differential topology, Topology**8**(1969), 127–150.